

# Entanglement in multiparticle systems

Nikolaj Korolev

NBI 2007

# Resumé

Recently the interest for entangled states has grown tremendously, predominantly because these special states are thought to play an important role in the development of quantum information. In this thesis I give a description of this striking phenomenon and introduce a test for it. Firstly though I consider the relevant theory beginning with the pure and mixed states where I define what a separable state is. In doing so the analysis relies heavily on the density operator formalism which is introduced with some of its important properties. The entangled states are then defined as being the states that are not separable, which in return are shown in general to be a weighted sum of product states. Another tool useful for studying entanglement is the Schmidt decomposition, which we see some applications of e.g. defining a measure of entanglement.

Secondly I look at an experiment where entanglement is created and verified by sending pulses of light through two samples of atoms prepared in a special state. By performing a measurement on the outgoing pulses one can deduce the variances on the spins of the samples and if these are sufficiently low the state is proven to be entangled. That this is the case is then shown by considering two tests that provide a sufficient criterion for entanglement based on the knowledge of the spin operators measured in the mentioned experiment. The first test gives a sufficient criterion for that two subsystems are entangled while the second test uses the result of the first test to assume that the entangled atoms are arranged in binary systems from which a criterion for 3-atom-entanglement is found. To obtain the second criterion we will have to minimize a function given as a matrix expression which is done efficiently in MatLab. There we obtain curves that represent the minimum on the variance of the orthogonal spin for given values of the mean spin. Finally a generalization to a  $k$ -particle entanglement is discussed and I report on the problems that occurred already with the test of 4-particle entanglement. In going further the complexity of the problem grows enormously which can be attributed to the asymmetry induced and shows that the test described does not have a clear-cut extension. Yet the test is directly applicable to other integer spin particles (in the experiment we considered atoms in the state  $F = 4$ ). Especially it could be interesting to try construct a similar experiment with spin 1 particles instead, since it might be easier to prove 3-particle entanglement now that the corresponding variance minimum is greater.

# Indhold

<b>1. Indledning</b>	<b>4</b>
<b>2. Teori</b>	<b>5</b>
2.1. Rene tilstande . . . . .	5
2.2. Blandede tilstande . . . . .	9
2.3. Schmidt dekomposition . . . . .	11
<b>3. Eksperimentet</b>	<b>14</b>
<b>4. Tests til påvisning af entanglement</b>	<b>17</b>
<b>5. Konklusion</b>	<b>23</b>
<b>A. Appendiks</b>	<b>26</b>
A.1. Schmidt dekomposition . . . . .	26
A.2. Programmet . . . . .	27

# 1. Indledning

Kvanteinformation er en voksende gren af fysikken, der vil bruge kvantemekaniske principper til at konstruere nye og langt mere effektive kommunikations- og udregningsmuligheder end man ellers råder over idag. Nogle af perspektiverne er at man kan danne kommunikationslinjer, der er fuldstændig sikret mod aflytning - ja faktisk er så er de første af denne slags blevet konstrueret, men er vist endnu ikke rigtig taget i brug. Kvante-computeren er også et område, hvor forskningen er meget intensiv, for med den ville man kunne foretage udregninger eksponentielt hurtigere end man kan med vore dages computere. Men den hastighed ville man f.eks. kunne bryde mange af de krypteringskoder, der er anvendt idag og kunne faktorisere primtal meget hurtigere, som beskrevet i Shors algoritme.

I udviklingen af kvanteinformation er man ret overbevist om at de entanglede tilstande vil spille en central rolle og de er f.eks. blevet brugt til at realisere teleportering. Derfor har man fokuseret meget på egenskaberne for disse særlige tilstande og undersøgt hvordan de kan skabes, deres stabilitet, samt hvordan man kan påvise at en given tilstand er entangled, hvilket er det jeg vil beskæftige mig med i denne opgave.

Entanglement selv er et rent kvantemekanisk fænomen, der knytter sig til situationer, hvor man i et system bestående af flere objekter ikke i beskrivelsen af et objekt kan isolere det fra de øvrige, selv om de kan være vilkårligt langt væk. Disse særlige tilstande er inseparable i den forstand at bølgefunktionen for det samlede system ikke kan skrives som produktet af bølgefunktionerne for de enkelte delsystemer. Tilstedeværelsen af entanglement fører til korrelationer mellem de tilhørende observable for systemerne, sådan så en måling på et system ser ud til at påvirke det andet øjeblikkeligt, som demonstreret i det berømte Einstein-Podolsky-Rosen paradoks fra 1935. Einstein og andre så udfaldet af dette tankeeksperiment som en understregning af at kvantemekanikken ikke er en komplet teori, da man her bryder med den gængse forestilling om lokal realisme. I forsøget på at forklare denne "spooky action at a distance" har man forsøgt at introducere skjulte variable, som kunne resultere i disse uventede korrelationer, men siden udledningen af Bells ulighed i 1964 og eftervisningen af bruddet af den i Aspects eksperiment i 1982 og andre siden hen har man fundet at entanglement ikke kan have en klassiske analog og i modsætning til de klassiske korrelationer, så kan fænomenet ikke forklares ved skjulte variable [1]. Med interessen for disse særlige tilstande har man søgt efter mulige tests, der i eksperimenter kunne bruges til at bekræfte tilstedeværelsen af entanglement og

sige noget om graden af denne, altså hvor mange partikler den omfatter. Påvisningen af entanglement som jeg vil se på vil være bygget op om et bestemt eksperiment, men har en generel gyldighed og kan anvendes i andre eksperimenter, hvor man kan måle de samme observable. Entanglement er realiseret for to gasskyer via en lyspuls og påvisningen udføres ved at vise korrelationen mellem de kollektive spin. Mere præcist så vil jeg først udlede et tilstrækkeligt kriterium for at de to atomensembler er entangled og bagefter et for at mindst 3 atomer er det. Begge kriterier er krav til at varianserne på de kollektive spin er tilpas små. Endelig vil jeg så diskutere en mulig generalisering af testen.

## 2. Teori

Inden vi kaster os ud i de entanglede tilstande er det nyttigt at se på to typer af tilstande - de rene og de blandede, hvor tæthedsoperatoren også vil blive introduceret. Efter dette kan jeg så definere hvad det vil sige at tilstandene er separable og herfra følger så hvad de entanglede tilstande er, nemlig dem, der ikke er separable. Derefter vil jeg beskrive et vigtigt værktøj knyttet til entanglement - Schmidt dekomposition og se på nogle anvendelser af den.

### 2.1. Rene tilstande

I dette afsnit vil jeg tale om de rene tilstande, d.v.s. de tilfælde, hvor det givne kvantesystem er i én bestemt tilstand og kan derfor beskrives ved en bølgefunktion. Lad os først betragte et system bestående af to delsystemer  $A$  og  $B$ . Hvis system  $A$  er i tilstanden  $|\psi\rangle_A$  og system  $B$  er i tilstanden  $|\chi\rangle_B$ , så vil tilstanden for det samlede system være givet ved  $|\psi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$ , som bare benævnes  $|\psi\rangle_A |\chi\rangle_B$ . Dette er en separabel tilstand - den er produktet af rene tilstande for system  $A$  og  $B$ . Tilstande for dette system, der ikke kan skrives på ovenstående form kaldes entanglede.

Inden jeg går over til et eksempel på en entangled tilstand vil jeg introducere et meget hyppigt forekommende objekt - qubitten - den kvantemekaniske udgave af den klassiske bit. I en almindelig computer bliver al information lagret i bits og en bit kan antage én af værdierne 0 og 1, der kan tænkes som sandt/falsk, ja/nej. Den kvantemekaniske analog er bygget på et to-dimensionalt Hilbertrum, hvor vi kan vælge ortonormalbasen bestående af elementerne  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . En qubit er så en (ren) tilstand af formen:  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ,

hvor  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Det ses at qubitten kan opfattes som en superposition af de klassiske bits med værdier 0 og 1, der svarer til det specielle tilfælde hhv.  $(a = 1, b = 0)$ ,  $(a = 0, b = 1)$ . I modsætning til den klassiske bit, der har en velbestemt værdi, der ikke ændres under målingen, så kender vi kun qubittens endelige tilstand, som resultat af målingen, når vi projicerer ind på dens ortonormalbasis og kan få begge udfald  $|0\rangle, |1\rangle$  med tilhørende sandsynligheder  $|\alpha|^2, |\beta|^2$ . En anden naturlig måde at betragte en qubit på i kvantemekanik er at se den som tilstanden for en spin- $\frac{1}{2}$ -partikel, hvor f.eks.  $|0\rangle$  kan tænkes som repræsenterende spin op og  $|1\rangle$  spin ned og  $|\alpha|^2, |\beta|^2$  så tilsvarende er sandsynlighederne for at måle hhv. spin op og ned. Med normaliseringen kan vi så betragte qubitten som repræsenterende en enhedsvektor i  $\mathbb{R}^3$ , hvis retning er bestemt af koefficienterne  $\alpha$  og  $\beta$ .

Lad os nu antage at både system  $A$  og  $B$  har et to-dimensionalt Hilbertrum, så de kan opfattes som qubits. Tilstanden

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B + |1\rangle_A|0\rangle_B) \quad (1)$$

er entangled, da den ikke kan skrives som produktet af en ren tilstand for system  $A$  og en ren tilstand for system  $B$ . Hvis nu Alice foretager en måling på system  $A$  i ovenstående basis, så er der to mulige resultater af målingen: enten måler Alice 0 og så ved vi at systemet nu er i tilstanden  $|0\rangle_A|1\rangle_B$  eller også måler hun 1 og så er systemet i tilstanden  $|1\rangle_A|0\rangle_B$ . Begge udfald er lige sandsynlige og uanset, hvor mange gange Bob bagefter måler (i samme basis) på system  $B$ , så vil han få det, som resultatet af Alices måling dikterer, altså det omvendte af Alice - hhv. 1 og 0. Øjensynligt er Bobs system blevet påvirket af Alices måling på sit system og det er uanset hvor langt væk de to delsystemer befinder sig fra hinanden. Det er det der ligger til grund for EPR-paradokset og her vil jeg blot lige bemærke, at selv om Alices måling på system  $A$  påvirker system  $B$  øjeblikkeligt, så ved Bob ikke hvilken af de to tilstande system  $B$  er i, for resultatet af Alices måling er helt tilfældigt. Så hvis Bob skal kende tilstanden uden at foretage en måling, så må Alice fortælle ham resultatet af sin måling, hvilket må foregå gennem en klassisk informationskanal, så vi har ikke forbrudt os mod kausaliteten.

I det kommende vil det vise sig at være nødvendigt at beskrive kvantesystemer ikke med bølgefunktioner, men med det der hedder tæthedsmatricer. Vi vil starte med at introducere den først for de rene tilstande og siden se, at der er en simpel generalisering til den mere komplicerede situation med blandede tilstande. Hvis vi nu først bare ser på system  $A$  og lader dens tilstand opløse i en komplet ortonormalbasis  $\{|u_n\rangle\}$ , så:

$|\psi\rangle = \sum_n a_n |u_n\rangle$ . Nu definerer jeg så tæthedsooperatoren  $\rho$  som  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ . Elementerne i den er:  $\rho_{mn} = \langle u_m | \rho | u_n \rangle = \langle u_m | \psi \rangle \langle \psi | u_n \rangle = a_m a_n^*$ , hvor jeg har brugt at eftersom  $\{|u_n\rangle\}$  er et ortonormalsæt, så er  $\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}$ . Det ses at  $\rho$  har  $\rho_{mn} = \rho_{nm}^*$ , så tæthedsooperatoren er hermitisk og hvis vores  $|u_n\rangle$  er egentilstande for en observabel  $O$  med tilhørende egenverdier  $\lambda_n$ , så er diagonalelementerne  $\rho_{nn} = a_n a_n^* = |a_n|^2$  sandsynlighederne for at målingen af observablen på systemet giver resultatet  $\lambda_n$ . Endvidere har tæthedsmatricen  $\text{Tr}(\rho) = \sum_n \rho_{nn} = \sum_n a_n a_n^* = \sum_n |a_n|^2 = 1$ , da dette jo er kvadratet på koefficienterne i udviklingen af vores normaliserede tilstand i den valgte basis. Derudover er tæthedsooperatoren positiv, for hvis vi betragter en vilkårlig tilstand  $\phi$ , så har vi at:  $\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle \langle \psi | \phi \rangle = |\langle \phi | \psi \rangle|^2 \geq 0$ .

Hvis vi vil bestemme forventningsværdien af en fysisk observabel  $O$ , når vi lader den virke på system  $A$ , så har vi at  $\langle O \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle = \sum_m \sum_n a_m^* a_n O_{mn}$ , hvor  $O_{mn} = \langle u_m | O | u_n \rangle$  er elementerne af operatoren  $O$  i vores basis. Men det kan vi jo udtrykke ved tæthedsmatricen som:

$$\langle O \rangle = \sum_m \sum_n \rho_{nm} O_{mn} = \sum_n \langle u_n | \rho \left( \sum_m |u_m\rangle \langle u_m| \right) O | u_n \rangle = \sum_n \langle u_n | \rho O | u_n \rangle = \text{Tr}(\rho O). \quad (2)$$

For vores valgte ortonormalsæt er komplet, så leddet i parenteser er blot identiteten. Det ses at mens forventningsværdien af en operator er kvadratisk i bølgefunktionen, så er den lineær i tæthedsooperatoren og mens bølgefunktionen altid er bestemt op til en fase, så har  $\rho$  ikke denne faseambiguitet, da den er invariant under fase transformationer  $|\psi\rangle \mapsto e^{i\phi} |\psi\rangle$ . Denne symmetri afspejler blot bevarelse af sandsynlighed. Ud fra Schrödingerligningen<sup>1</sup>  $|\dot{\psi}\rangle = -iH|\psi\rangle$  kan vi opstille bevægelsesligningen for tæthedsmatricen. Ved at tage den tidsafledede fås:

$$\dot{\rho} = \frac{d}{dt}(|\psi\rangle\langle\psi|) = (|\dot{\psi}\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle\dot{\psi}|) = (-iH|\psi\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle\psi|H^\dagger i) = -i[H, \rho]. \quad (3)$$

Hvilket er Liouvilles ligning, der til forveksling ligner det man har i Heisenberg billedet. For de rene tilstande gælder der det specielle at  $\rho^2 = (|\psi\rangle\langle\psi|)(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho$ , hvilket ligefrem kan tages som definitionen af en ren tilstand.

Hermed har vi set nogle af de interessante egenskaber ved tæthedsooperatoren og selv om vi blot har talt om tæthedsooperatoren for en ren tilstand hørende til et enkelt system ( $A$ ), så generaliseres det ligetil for et sammensat system bestående af komponenterne,  $A, B, \dots Z$ . Til hvert delsystem kan man også tildele en tæthedsooperator - den reducerede

---

<sup>1</sup> Igennem hele opgaven er  $\hbar$  sat til 1.

tæthedsmatrix. For eksempel for system  $AB$  kan vi forestille os at vi vil foretage en måling  $O_A$  kun på system  $A$  og ignorerer system  $B$ . Der definerer vi den reducerede tæthedsmatrix for system  $A$  som den delvise trace af  $\rho$  over basen  $\{|v_n\rangle\}$  for system  $B$ :  $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho) = \sum_n \langle v_n|_B \rho |v_n\rangle_B$ . Så har vi nu at at:  $\langle O_A \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho(O_A \otimes 1)) = \langle O_A \rangle_{\rho_A}$ . Den reducerede tæthedsmatrix  $\rho_A$  indeholder den del af informationen i  $\rho$ , der kun vedrører  $A$  og derfor fortæller hvad forventningsværdien er for en operator, der kun virker på  $A$ . Med vores rene entangledede tilstand i (1) har vi for det to-delte system  $AB$  at:

$$\rho = \frac{1}{2}(|0\rangle_A |1\rangle_B \langle 0|_A \langle 1|_B + |0\rangle_A |1\rangle_B \langle 1|_A \langle 0|_B + |1\rangle_A |0\rangle_B \langle 0|_A \langle 1|_B + |1\rangle_A |0\rangle_B \langle 1|_A \langle 0|_B), \quad (4)$$

mens den reducerede tæthedsmatrix for system  $A$  bliver:

$$\rho_A = \langle 0|_B \rho |0\rangle_B + \langle 1|_B \rho |1\rangle_B = \frac{1}{2}(|1\rangle_A \langle 1|_A + |0\rangle_A \langle 0|_A) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_A \quad (5)$$

og tilsvarende er  $\rho_B = \frac{1}{2} \mathbf{1}_B$ . Ligesom det ikke var muligt at faktorisere (1), som produktet af bølgefunktionerne for system  $A$  og  $B$ , er det heller ikke muligt at skrive den totale tæthedsmatrix som produktet af de reducerede tæthedsmatricer for  $A$  og  $B$ . Der gælder helt generelt at der er ækvivalens mellem det at tilstanden ikke er separabel og det at tæthedsmatricen ikke kan skrives som produktet af tæthedsmatricerne for delsystemerne. En måde at motivere denne indsigt på, er at lade  $O_A, \tilde{O}_B$  være observable, som vi måler samtidigt på de to systemer  $A$  og  $B$ . Hvis de er ukorrelerede, så må der gælde at forventningsværdien for den kollektive måling faktoriserer:  $\text{Tr}(\rho(O_A \otimes \tilde{O}_B)) = \text{Tr}(\rho_A O_A) \text{Tr}(\rho_B \tilde{O}_B)$ . Men det gælder jo, hvis og kun hvis  $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$ , så faktorabiliteten af tæthedsoperatoren er en konsekvens af at vi forlanger at de to målinger vi foretager på system  $A$  og  $B$  er uafhængige. Er det ikke muligt at skrive tæthedsmatricen på denne form, er de to systemer ikke uafhængige og tilstanden er entangled<sup>2</sup>. Det samme gælder for et ensemble bestående af vilkårligt mange delsystemer: der er den rene tilstand separabel, hvis og kun hvis den kan skrives som:

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B \otimes \cdots \otimes \rho_Z, \text{ hvor de enkelte } \rho_k \text{ er tæthedsmatricer for delsystemerne.}$$

Det ses at den reducerede tæthedsoperator i (5) for vores rene entangledede tilstand ikke repræsenterer en ren tilstand, men er et eksempel på en blandet tilstand, hvor de to tilstande  $|0\rangle, |1\rangle$  forekommer med lige stor sandsynlighed. Jvf. definitionen foroven, så ses det, at de rene separable tilstande altid vil have de reducerede tæthedsoperatorer som rene tilstande og omvendt vil de rene entangledede tilstande have reducerede tæthedsoperatorer som blandede tilstande. Derudover så var vores entangledede tilstand blot en

---

<sup>2</sup> Er diskuteret mere i [5].



af de fire i Bell-basen:

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B \pm |1\rangle_A|0\rangle_B), |\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B \pm |1\rangle_A|1\rangle_B) \quad (5)$$

og regner man efter, finder man, at de alle har den samme reducerede tæthedsoperator for system  $A$  (eller  $B$  for den sags skyld), nemlig  $\frac{1}{2}\mathbf{1}$ . D.v.s. at når Alice foretager en måling på  $A$  vil hun ikke kunne skelne Bell-tilstandene fra hinanden og Bob kunne skifte som han ville i Bell-basen uden at Alice ville opdage det. Altså giver den reducerede tæthedsmatrix generelt ikke en entydig bestemmelse af tilstanden, som det også vil fremgå af Schmidt-dekompositionen.

## 2.2. Blandede tilstande

De rene tilstande beskrevet foroven er en ideel beskrivelse af virkelighedens kvantesystemer, hvor man ikke har adgang til systemets bølgefunktion pga. støj, der kan skyldes vekselvirkning med omgivelserne eller den støj som en måling på systemet inducerer. Der er den maksimale information man kan få adgang til sandsynlighederne for at systemet er at finde i de forskellige tilstande. Altså så systemet kan være i tilstanden  $|\psi\rangle_1, |\psi\rangle_2, \dots, |\psi\rangle_n$  med tilhørende sandsynlighed  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Denne situation er væsentligt forskellig fra den, hvor man har at systemet er i den rene tilstand bestående af superpositionerne  $|\psi\rangle = \sqrt{p_1}|\psi_1\rangle + \sqrt{p_2}|\psi_2\rangle + \dots + \sqrt{p_n}|\psi_n\rangle$  og kan tænkes realiseret ved at man forsøgte at lave mange kopier af det samme system. F.eks. hvis vi betragter systemet bestående af en spin- $\frac{1}{2}$ -partikel i tilstanden  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle)$ , så er forventningsværdien for  $J_x$ :  $\langle J_x \rangle = \langle \psi | \frac{1}{2}(|\uparrow_z\rangle\langle\downarrow_z| + |\downarrow_z\rangle\langle\uparrow_z|) | \psi \rangle = +\frac{1}{2}$ , hvilket vi vidste i forvejen, da vores tilstand  $|\psi\rangle$  jo er egentilstanden for  $J_x - |\uparrow_x\rangle$ . Så vi måler altså spin op hver gang. Men hvis systemet er konstrueret, så det er lige sandsynligt at finde det i tilstanden  $|\uparrow_z\rangle$  som  $|\downarrow_z\rangle$  er tæthedsoperatoren  $\rho = \frac{1}{2}(|\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z| + |\downarrow_z\rangle\langle\downarrow_z|) = \frac{1}{2}\mathbf{1}$ . Så forventningsværdien for  $J_x$  bliver nu:  $\langle J_x \rangle = \text{Tr}(\rho J_x) = 0$ . Det må betyde at der er altså lige stor sandsynlighed for at måle spin op som spin ned og faktisk kan man ud fra tæthedsoperatoren vise at sådan forholder det sig ikke kun for x-retningen, men en hvilken som helst anden retning også. Altså er der en stor forskel på de to situationer og for at kunne beskrive de blandede tilstande er det nødvendigt at se på tæthedsoperatoren.

Nu definerer vi i forlængelse af forrige afsnit tæthedsmatricen for de blandede tilstande ved  $\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ , ( $\sum_n p_n = 1$ ). Det ses at tæthedsmatricen blot er en vægtet sum af tæthedsmatricerne for de enkelte tilstande med  $\rho_n = |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$  og at den har de samme

egenskaber som de enkelte  $\rho_n$ . Nemlig at  $\rho$  er hermitisk, da  $\rho$  er en linearkombination med reelle koefficienter af  $\rho_n$ 'erne, der alle er hermitiske. Ligeledes har den trace 1, for  $\text{Tr}(\rho) = \text{Tr}(\sum_n p_n \rho_n) = \sum_n p_n \text{Tr}(\rho_n) = \sum_n p_n = 1$ , hvor jeg har brugt at  $\text{Tr}$  er lineær.  $\rho$  er også positiv manifest semidefinit, da  $\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \langle \phi | (\sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|) | \phi \rangle = \sum_n p_n |\langle \phi | \psi_n \rangle|^2 \geq 0$  og igen følger det af lineariteten i konstruktionen af  $\rho$  at tæthedsoperatoren for ensemblet har den samme tidsudvikling (3):  $\dot{\rho} = -i[H, \rho]$ . Forventningsværdien for en observabel  $O$  virkende på ensemblet bliver i analogi med før:  $\langle O \rangle = \sum_n p_n \langle \psi_n | O | \psi_n \rangle = \text{Tr}(\rho O)$ . Vi definerer at en blandet tilstand for et todelt system er separabel, hvis den kan skrives på formen  $\rho = \sum_n p_n \rho_A^n \otimes \rho_B^n$ , altså at den er en sum af produkttilstande, hvor de enkelte  $\rho_A^n$  og  $\rho_B^n$  er tæthedsmatrixerne for delsystemerne  $A$  og  $B$ .

For at motivere denne definition kan vi betragte tilfældet, hvor de to systemer er korreleret på klassisk vis, som det er gjort i [1]. Hvis man har en anordning, der med sandsynligheden  $p_n$  forbereder system  $A$  og  $B$  i tilstandene hhv.  $\rho_A^n$  og  $\rho_B^n$  og vi nu foretager en kollektiv måling på systemerne  $A$  og  $B$ , så faktoriserer forventningsværdien af den kollektive observabel ikke, for tilstandene  $\rho_A, \rho_B$  for de to systemer hænger nu sammen - de er klassisk korreleret. For at finde forventningsværdien for den kollektive måling, må man vægte forventningsværdierne for de enkelte tilstande med deres tilhørende sandsynligheder  $p_n$ , altså:  $\langle O_A \otimes O_B \rangle_\rho = \sum_n p_n \text{Tr}(\rho_A^n O_A) \text{Tr}(\rho_B^n O_B)$ . Men det er jo det samme som at sige at tæthedsmatrixen for det samlede system er  $\rho = \sum_n p_n \rho_A^n \otimes \rho_B^n$  og det ses at det rene ensemble er det specielle tilfælde, hvor alle  $p_n$  er nul, på nær et enkelt. Tilstande der ikke kan skrives på denne form siges at være entangled - korrelationerne mellem de to systemer kan ikke forklares på klassisk vis, som gjort foroven.

Indtil videre har vi talt om et system bestående af to delsystemer, men det er ligetil at generalisere til et vilkåligt antal delsystemer, så tæthedsoperatoren for en separabel tilstand for systemet bestående af delsystemerne  $A, B, \dots, Z$  kan skrives på formen:

$$\rho = \sum_n p_n \rho_A^n \otimes \rho_B^n \otimes \dots \otimes \rho_Z^n.$$

Bemærk at for et ensemble har vi ikke en unik konstruktion af tilstanden repræsenteret ved  $\rho$ . F.eks. lad os betragte et ensemble, hvor tilstandene  $|0\rangle, |1\rangle$  forekommer med lige stor sandsynlighed. Dette ensemble er repræsenteret ved tæthedsoperatoren  $\rho = \frac{1}{2}(|1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0|) = \frac{1}{2}\mathbf{1}$ . Lad os nu betragte et ensemble, hvor tilstandene  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$  forekommer med lige stor sandsynlighed. Denne gang har vi igen at:  $\rho = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) = \frac{1}{2}\mathbf{1}$ . Som nævnt før, så kan qubitten tænkes som tilstanden for en spin- $\frac{1}{2}$  partikel og set i det lys, så kan den første tæthedsmatrix opfattes som et ensemble, hvor halvdelen har spinnets orienteret op, som

vi kan tage som z-aksen og halvdelen ned. Så genkendes tilstandene  $|+\rangle$  og  $|-\rangle$ , som tilstandene med spinnrettet langs- eller modsat x-aksen og begge tilstande forekommer med sandsynligheden  $\frac{1}{2}$ . Selv om de to ensembler er konstrueret på forskellig vis giver de tilsyneladende den samme tæthedsoperator og ved at måle på spinnret, (f.eks. i et eksperiment af typen som Stern og Gerlach lavede) kan vi ikke skelne de to ensembler fra hinanden. Så to forskellige statistiske blandinger kan altså godt give den samme tæthedsmatrix og man kan kun skelne to blandede tilstande fra hinanden, hvis deres tæthedsmatrix er forskellig, for ellers vil forventningsværdien af den tilhørende observabel, som man vil måle, være ens:  $\langle O \rangle = \text{Tr}(\rho O)$ . Faktisk så kan man konstruere de blandede tilstande på uendeligt mange måder, det her var blot et eksempel. De rene tilstande derimod har ikke den flertydighed, for som vi så, så kan enhver ren tilstand  $|\psi\rangle$  for en qubit tænkes som en spin- $\frac{1}{2}$ -partikel med spinnret i en retning  $\hat{n}$ . Hvis vi så måler spinnret i retningen  $\hat{n}$ , så vil kun den ene tilstand  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  altid give resultat 1 hver gang - vi kan ikke få det samme resultat ved at forberede tilstanden på anden vis, så konstruktionen er entydig.

### 2.3. Schmidt dekomposition

Nu vil jeg komme ind på et vigtigt instrument, når man vil analysere entanglement - Schmidt dekomposition. Lad os betragte vores 2-delte system, bestående af systemerne  $A$  og  $B$ , som er i den rene tilstand  $|\psi\rangle$ . Så kan vi foretage Schmidt dekompositionen, idet der findes ortonormalbaser<sup>3</sup>  $\{|u_m\rangle\}$ ,  $\{|v_n\rangle\}$  for Hilbertrumene hørende til de to systemer, sådan så man kan skrive tilstanden som:

$$|\psi\rangle = \sum_n^{\min(M,N)} \sqrt{p_n} |u_n\rangle_A |v_n\rangle_B, \quad \sum_n^{\min(M,N)} p_n = 1, \quad (6)$$

hvor  $M$  og  $N$  er antallet af basiselementer i de to systemers Hilbertrum. Ud fra dette kan vi danne den totale tæthedsmatrix, som  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  og bestemme de reducerede tæthedsmatrixer for delsystemerne ved at "trace det andet system ud", så man kan skrive:  $\rho_A = \sum_n p_n |u_n\rangle_A \langle u_n|_A$  og tilsvarende  $\rho_B = \sum_n p_n |v_n\rangle_B \langle v_n|_B$ . Det ses at egenverdierne for de operatorer er ens -  $p_n$  (eller ihvertfald dem, der er positive, men de kan have forskelligt antal 0-egenverdier, da Hilbertrumene for de to systemer kan have forskellig dimension), der betyder at man kan forvente at  $A$  og  $B$  vil have nogle fælles

---

<sup>3</sup> Beviset er givet i appendiks A.1

egenskaber. Ligeledes ses at hvis alle  $p_n$  er forskellige, så er Schmidt dekompositionen for  $|\psi\rangle$  entydigt bestemt ud fra  $\rho_A$  og  $\rho_B$ . Er det ikke tilfældet ved vi ikke hvordan vi skal sætte basisvektorerne for de to delsystemer sammen, hvilket vi så demonstreret for Bell-baserne tidligere, der alle havde  $\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2}\mathbf{1}$ ,  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ , så det var ikke muligt ud fra tæthedsmatricerne at bestemme tilstanden for det samlede system. Dette er et specialtilfælde af den generelle situation, hvor hvis vi antager at både system  $A$  og  $B$  har  $N$ -dimensionale Hilbertrum og  $U_{mn}$  er en unitær matrix, så vil alle tilstande af formen  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m,n} |u_m\rangle_A U_{mn} |v_n\rangle_B$ , have  $\rho_A = \rho_B = \frac{1}{N}\mathbf{1}$ , hvilket vises som gjort foroven ved at danne den totale tæthedsmatrix og bruge ortonormaliteten til at danne de reducerede tæthedsmatricer. Der gælder helt generelt at hvis to rene tilstande for et 2-delt system har den samme reducerede tæthedsmatrix for lad os sige system  $A$ , så vil der findes et unitært basisskift  $U$  for system  $B$ , så tilstandene bliver ens. For hvis  $|\psi\rangle = \sum_n^{\min(M,N)} \sqrt{p_n} |u_n\rangle_A |v_n\rangle_B$  er Schmidt-dekompositionen af tilstanden  $|\psi\rangle$  og den har den samme reducerede tæthedsmatrix for system  $A$ , som tilstanden  $|\chi\rangle$ , så må det betyde at  $|\chi\rangle$  kan dekomponeres som  $|\chi\rangle = \sum_n^{\min(M,N)} \sqrt{p_n} (|u_n\rangle_A |\tilde{v}_n\rangle_B)$ , hvor  $\{|\tilde{v}_n\rangle\}$  er en anden basis for  $B$ 's Hilbertrum. Nu kan vi lade  $U$  være den unitære afbildning, der afbilder ortonormalbasen  $\{|\tilde{v}_n\rangle\}$  til  $\{|v_n\rangle\}$  og den vil opfylde det ønskede, nemlig at:  $(1 \otimes U)|\chi\rangle = \sum_n^{\min(M,N)} \sqrt{p_n} |u_n\rangle_A (U|\tilde{v}_n\rangle_B) = \sum_n^{\min(M,N)} \sqrt{p_n} |u_n\rangle_A |v_n\rangle_B = |\psi\rangle$ . Til dekompositionen af tilstanden hører Schmidt-tallet, der er antallet af  $p_n$  i dekompositionen. Dette tal kan bruges til at beskrive graden af entanglement, for mens vi for dekompositionen af en tilstand har en flertydighed med hensyn til basen via unitære basisskift, der virker på delsystemerne hver for sig, altså på formen  $U = U_A \otimes U_B$ , så er Schmidt-tallet oplagt invariant under disse (unitære afbildninger bevarer antallet af elementer i basisset). F.eks. hvis vi har en separabel tilstand  $|\psi\rangle_A |\chi\rangle_B$  er Schmidt-tallet 1 og omvendt er det klart, at hvis Schmidt-tallet 1 er tilstanden nødvendigvis separabel. En analog måde at formulere det på er, at de reducerede tæthedsmatricer er rene tilstande, hvis og kun hvis tilstanden er separabel og rangen af den reducerede tæthedsmatrix ( $\rho_A$  eller  $\rho_B$ ) er lig med Schmidt-tallet. Heraf følger at en anden måde at definere at en given tilstand er entangled, er at dens Schmidt-tal er større end 1. Ved hjælp af Schmidt-dekompositionen kan vi som mål for graden af entanglement definere entropien:

$$S = - \sum_n^{\tilde{N}} p_n \log_{\tilde{N}}(p_n) \quad (7)$$

Her er  $\tilde{N}$  dimensionen af Hilbertrummet (det mindste af det hørende til  $A$  og  $B$ - $\min(N, M)$ ) og da  $p_n$ 'erne er sandsynligheder, der adderer til 1, følger det at entropien er begrænset nedtil af 0 og opadtil af 1.  $S = 0$  gælder kun, hvis der er ét  $p_n$  i summen - og det er 1 og det så vi jo foroven at netop gjaldt for de separable tilstande. De tilstande, der giver  $S = 1$  er dem, der for Schmidt-dekompositionen har  $p_1 = p_2, \dots, p_{\tilde{N}} = \frac{1}{\tilde{N}}$ , hvilket man nemt kan tjekke (diffentierte og sætte kvotienten lig nul). Disse maksimalt entangledede tilstande, så vi også tidligere i tilfældet  $\tilde{N} = 2$ , nemlig Bell-tilstandene, der havde  $\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2}\mathbf{1}$ . Intuitivt giver det også god mening at graden af entanglement hænger sådan sammen med sandsynlighederne, for hvis der er et  $p_n$ , der er tæt på at være 1, så vil den tilhørende tilstand være den dominerende og tilstanden vil være tæt på separabel og omvendt, hvis alle tilstande er lige sandsynlige, så er entanglement maksimal, vi kan ikke vælge én af tilstandene ud til at repræsentere det samlede system - alle tilstande er lige gode og vores uvidenhed maksimal.

En anden interessant anvendelse af Schmidt-dekompositionen ses i den såkaldte GHJW sætning<sup>4</sup>, der handler om *purifikation* af en blandet tilstand. Lad os betragte et enkelt system  $A$  og antage at det er i en blandet tilstand repræsenteret ved tæthedsoperatoren  $\rho_A = \sum_n p_n |\psi_n\rangle_A \langle \psi_n|_A$ . Nu vil vi så skabe purifikationen af  $\rho_A$ , som en ren tilstand for et todelt system, bestående af systemet  $A$  og et referencesystem  $B$ , som har et tilstandsrum af samme dimension som  $A$ , sådan så at når man tracer system  $B$  ud, så får man  $\rho_A$ . Hvis vi lader  $\{|\chi_n\rangle\}$  være en ortonormalbasis for det konstruerede system  $B$  (men vi har ikke antaget at de rene tilstande i  $\rho_A$  er ortogonale), så kan den rene tilstand for det samlede system skrives på Schmidt-formen:  $|\phi\rangle_{AB} = \sum_n \sqrt{p_n} |\psi_n\rangle_A |\chi_n\rangle_B$ . Denne rene tilstand opfylder oplagt at den har den reducerede tæthedsmatrix  $\rho_A$  foroven. I den tilstand kan vi se at system  $B$  har arvet sandsynlighederne for system  $A$  i den forstand at hvis vi foretager en måling, der er en ortogonal projektion i basen for  $B$ , så vil vi få tilstanden  $|\chi_n\rangle_B$  med sandsynlighed  $p_n$  og vi ved automatisk at system  $A$  er i tilstanden  $|\psi_n\rangle$ . Så selv om de rene tilstande i  $\rho_A$  ikke nødvendigvis er ortogonale, har vi fundet en måde at se, hvorpå vi kan udvælge de enkelte  $|\psi_n\rangle_A$  ved at måle på system  $B$  istedet. Som vi har set, så er der ikke en entydig måde at udtrykke tæthedsoperatoren for en blandet tilstand - den kan skrives som et ensemble af rene tilstande på uendeligt mange måder. GJHW sætningen siger så at alle de mulige realiseringer af  $\rho_A$  kan konstrueres, idet der findes et Hilbertrum for referencesystemet  $B$  og en ren tilstand  $|\phi\rangle_{AB}$  for det

---

<sup>4</sup> Gisin, Hughston, Jozsa og Wotters.

samlede system, sådan at når vi måler på en passende observabel i system  $B$  kan vi realisere det ønskede ensemble. Kvanteraseren er et eksempel på anvendelse af denne sætning.

Vi har hermed set noget af den relevante teori bag entanglement og i det følgende vil vi særligt bruge det fundne om tæthedsoperatoren og dens form for separable tilstande. Men først vil vi se hvordan entanglement kan skabes.

### 3. Eksperimentet

Jeg vil i det følgende beskrive eksperimentet i [4], hvor entanglement er realiseret på makroskopisk niveau, nemlig mellem to adskilte ensembler, der består af i størrelsesordenen  $10^{12}$  cæsium-133 atomer indeholdt i parafinbeklædte celler. Cæsium har en symmetrisk fordeling af 52 elektroner og en enkelt ydre elektron i tilstanden  $6S_{\frac{1}{2}}$ . Det er denne ydre elektron sammen med kernespinnets på  $\frac{7}{2}$ , der karakteriserer atomets energiniveauer. Ved addition af spin, får vi altså to mulige værdier for det totale spin  $F$ , nemlig 3 og 4. I dette forsøg vil vi udelukkende fokusere på tilstanden  $F = 4$ , hvilket også er muligt i praksis, da hyperfinsplittingen mellem de to energiniveauer er stor - i størrelsesordenen af GHz.

Først udsættes de to atomensembler for *optisk pumpning*, der er cirkulært polariseret lys ( $\sigma_+, \sigma_-$ ), der exciterer cæsiumatomerne til tilstandene  $m_F = 4$  i det ene ensemble og  $m_F = -4$  i det andet. Vælger vi at kalde vores kvantiseringsakse for x, så har vi derved skabt en *kohærent spintilstand* i de to ensembler; spinnets er orienteret langs x-aksen i det ene og -x i det andet. Med denne spinpolarisering har vi for det kollektive spin  $\hat{J} = \sum_i \hat{j}_i$  ( $\hat{j}_i$  er spinnets for de enkelte atomer, som er i tilstanden  $F = 4$ ), at  $\tilde{J}_x = \hat{J}_{x_1} = -\hat{J}_{x_2}$ , mens de ortogonale komponenter vil have forsvindende forventningsværdi (pr. konstruktion af ensemblet) og fluktuere binomielt med varians  $\tilde{J}_x/2$  (følger af Heisenbergs usikkerhedsrelation og symmetrien mellem de to ortogonale spin). Da vi har så mange atomer i hvert ensemble og vi med høj nøjagtighed får orienteret dem i x (eller-x)-aksens retning, så vil det kollektive spin  $\tilde{J}_x$  blive opfattet som en makroskopisk størrelse, så vi med god tilnærmelse kan betragte  $\tilde{J}_x$  klassisk - som et tal. Efter at ensemblerne er kommet i den kohærente spintilstand slukkes for den optiske pumpning og nu vil vi entangle atomerne i de to ensembler ved at sende polariseret lys igennem dem: først en entanglement-skabende puls og dernæst en entanglement-bekræftende. Til beskrivelse af lyset bruges Stokes-operatorerne  $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ , der opfylder en kommutator-

relation analog til den for spinnet:  $[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hat{S}_x$  og bestemmer lysets polarisation. Mere præcist så er  $\hat{S}_y$  forskellen mellem polarisationerne ved  $\pm 45^\circ$ ,  $S_z$  er forskellen mellem højre- og venstrehånds cirkulær polarisering i udbredelsesretningen  $z$ .  $\hat{S}_x$  er forskellen mellem polarisationerne i  $x$ - og  $y$ -retningens retning og i dette forsøg er lyset polariseret linært langs  $x$ -aksen og har kun en meget svag komponent i  $y$ -aksens retning. Ligesom i tilfældet med de kollektive spin kan vi derved betragte operatoren  $\hat{S}_x$ , som et tal, så al information om  $\hat{S}_y$  og  $\hat{S}_z$  ligger i den  $y$ -polariserede komponent af lyset (kan indses hvis man skriver Stokes-operatorerne ud med hæve- og sænkeoperatorer og bruger at  $\hat{a}_x = \hat{a}_x^\dagger = a_x$  er et tal.) Endvidere gælder der som konsekvens af Heisenbergs usikkerhedsprincip og kommutatorrelationen foroven at  $\text{Var}(\hat{S}_y)\text{Var}(\hat{S}_z) \geq \frac{S_x^2}{4}$ .

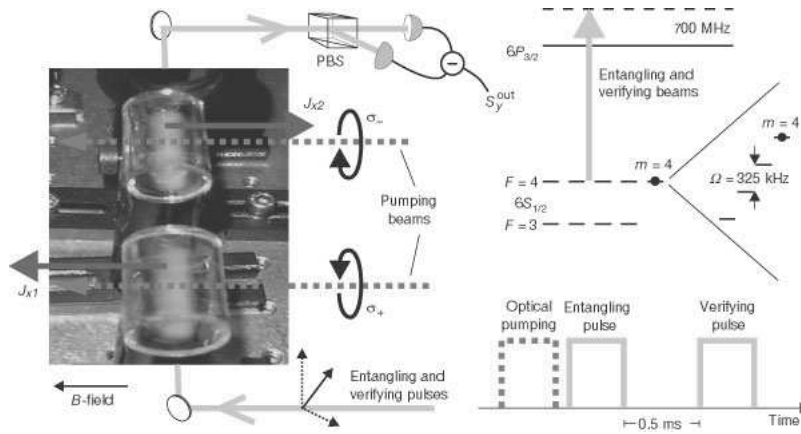
I eksperimentet er der påtrykt et homogent magnetfelt i  $x$ -aksens retning, der får de kollektive spin  $\hat{J}_y$  og  $\hat{J}_z$  til at præcessere med Larmorfrekvensen  $\Omega$ . Ved hjælp af dette kan man måle  $y$ - og  $z$ -komponenten af spinnet på samme tid, hvorimod man ellers måtte foretage to separate målinger. Det er nemlig blevet vist at når man sender en ikke-resonant puls gennem to atomare ensembler med modsatrettede middelspin og med et påtrykt magnetfelt i  $x$ -retningen, vil vekselvirkningen mellem atomerne og lyset med god tilnærmelse<sup>5</sup> give anledning til følgende ændring for  $\hat{S}_y$  (in betegner før vi har sendt pulsen gennem ensemblerne og out efter og  $\alpha$  er en konstant, der indeholder de anvendte parametre i forsøget):

$$\hat{S}_y^{\text{out}} = \hat{S}_y^{\text{in}} + \alpha((\hat{J}_{y_1} + \hat{J}_{y_2}) \sin(\Omega t) + (\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2}) \cos(\Omega t)), \quad (8)$$

hvor spinnene  $\hat{J}_y$  og  $\hat{J}_z$  nu er defineret i et koordinatsystem, der roterer med Larmorfrekvensen  $\Omega$  om magnetfeltets retning  $x$ . Da frekvensen er fælles for begge spin vil rotationen ikke påvirke deres indbyrdes orientering og størrelse og betingelsen for entanglement, som vi vil se om lidt, vil være den samme, som hvis magnetfeltet ikke havde været der. I forsøget kan vi måle pulsens  $\hat{S}_y^{\text{out}}$  ved hjælp af en polariseret beamsplitter med to detektorer, hvor den inducerede strøm deles op i to og dens  $\cos/\sin$  komponenter måles.

---

<sup>5</sup> Vi har ignoreret Starkskiftet, som er fælles for alle atomer og kun afhænger af fotondensiteten og blot giver anledning til en forskydning af energien uden at ændre på dynamikken. Derudover har vi negligeret højere ordens koblinger, hvilket er tilladeligt, da vores lys er meget blåforskuet fra nærmeste hyperfynniveau - se til højre for forsøgsopstillingen på næste side.



Derved får man adgang til Stokes-operatorens cos/sin komponenter og ved at foretage tilpas mange målinger kan vi bestemme variansererne på  $S_{ycos}^{out}$  og  $S_{ysin}^{out}$  ved at sammenligne resultaterne af målingerne for først den entanglede puls og så den bekræftende. Vi kan også finde variansererne ud fra (8) ved først at gange med cos/sin og integrere over varigheden af målingen  $T$ , idet vi bruger at  $\int_0^T \cos^2(\Omega t) dt \approx \int_0^T \sin^2(\Omega t) dt \approx \frac{T}{2}$ , samt  $\int_0^T \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) dt \approx 0$ , hvorefter vi får:

$$\text{Var}(\hat{S}_{ycos}^{out}) = \text{Var}(\hat{S}_{ycos}^{in}) + \frac{1}{2}\alpha^2 \text{Var}(\hat{J}_z), \text{Var}(\hat{S}_{ysin}^{out}) = \text{Var}(\hat{S}_{ysin}^{in}) + \frac{1}{2}\alpha^2 \text{Var}(\hat{J}_y) \quad (9)$$

Her betegner  $\hat{J}_z = \hat{J}_{z1} + \hat{J}_{z2}$  og  $\hat{J}_y = \hat{J}_{y1} + \hat{J}_{y2}$  og når vi lægger variansererne i (9) sammen fås:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{S}_{ycos}^{out}) + \text{Var}(\hat{S}_{ysin}^{out}) &= \text{Var}(\hat{S}_{ycos}^{in}) + \frac{1}{2}\alpha^2 \text{Var}(\hat{J}_z) + \text{Var}(\hat{S}_{ysin}^{in}) + \frac{1}{2}\alpha^2 \text{Var}(\hat{J}_y) \\ &= \text{Var}(\hat{S}^{in}) + \frac{1}{2}\alpha^2 (\text{Var}(\hat{J}_y) + \text{Var}(\hat{J}_z)). \end{aligned} \quad (10)$$

Hvis målinger af de spektrale komponenter  $\hat{S}_{ycos}^{out}, \hat{S}_{ysin}^{out}$  gav det samme udfald for begge pulser, ville variansen være 0 og vi ville have en fuldstændig entangled tilstand. Ellers så skal vi for målingerne tjekke om der gælder at  $\text{Var}(\hat{S}_{ycos}^{out}) + \text{Var}(\hat{S}_{ysin}^{out}) < \text{Var}(\hat{S}^{in}) + \alpha^2 \tilde{J}_x$  ( $\tilde{J}_x$  måles ved den *magneto-optiske* metode og dens værdi er kontrolleret med høj præcision, mens variansen på  $\hat{S}^{in}$  kan bestemmes separat). Er det tilfældet så ved vi fra (10) at så er  $\text{Var}(\hat{J}_y) + \text{Var}(\hat{J}_z) < 2\tilde{J}_x$ , hvilket betyder at de to ensembler er entangled, som vi skal se i næste afsnit. Så ud fra målinger på lysets Stokesoperatorer, har vi altså fået lavet en ikke-destruktiv måling af de kollektive spin for de to ensembler og har mulighed for at tjekke, hvorvidt den første puls inducerede entanglement mellem de to ensembler. I [4] berettes der også om at det rent faktisk var tilfældet og for tilpas høje værdier af middelspinnet kunne entanglement påvises - se evt. fig.3 i [4].



## 4. Tests til påvisning af entanglement

I det følgende vil vi se på hvordan man for et todelt system  $AB$  indeholdende et antal spin- $J$  partikler kan påvise entanglement mellem partiklerne i  $A$  og  $B$ . Vi vil formulere kriterierne ved hjælp af spin-operatorerne og selv om vi tager udgangspunkt i eksperimentet i forrige afsnit, så kan disse kriterier bruges mere generelt i situationer, hvor man kan måle de brugte observable. Jeg vil her fortsætte med at bruge notationen, som introduceret tidligere, men med den forskel at jeg nu vil tænke at de to ensembler er parallelt orienteret, svarende til en rotation af x-aksen på  $180^\circ$  til forskel fra før, så  $y$ -komponenten af spinnet for lad os sige det andet ensemble får et minus, mens  $z$ -komponenten forbliver uændret. Altså vil vi nu se på operatorerne  $\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2}$  og  $\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2}$ , som er uafhængige, da de kommuterer, for nu er  $\tilde{J}_x = \hat{J}_{x_1} = \hat{J}_{x_2}$ .

Først vil vi teste om de to ensembler er entangled med hinanden. Hvis det ikke er tilfældet ved vi fra afsnittet om blandede tilstande at den samlede tilstand  $\rho$  kan skrives som:  $\rho = \sum_i p_i \rho_1^i \otimes \rho_2^i$ , hvor  $\rho_1$  og  $\rho_2$  er tæthedsmatricerne for de to ensembler. Vi vil nu opstille et simpelt kriterium baseret på [2], idet vi vil betragte varianserne på de to ortogonale spin og se hvad summen af dem mindst må være for en separabel tilstand udtrykt ved  $J_x$ <sup>6</sup>. Med  $\Delta = \text{Var}(\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2}) + \text{Var}(\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2})$ , har vi:

$$\Delta = \sum_i p_i (\langle (\Delta(\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2}))^2 \rangle_i + \langle (\Delta(\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2}))^2 \rangle_i) \quad (11)$$

$$= \sum_i p_i (\langle (\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2})^2 \rangle_i + \langle (\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2})^2 \rangle_i) - \langle \hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2} \rangle_\rho^2 - \langle \hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2} \rangle_\rho^2 \quad (12)$$

$$= \sum_i p_i (\langle \hat{J}_{y_1}^2 \rangle_i + \langle \hat{J}_{y_2}^2 \rangle_i + \langle \hat{J}_{z_1}^2 \rangle_i + \langle \hat{J}_{z_2}^2 \rangle_i) + \sum_i -2p_i \langle \hat{J}_{y_1} \rangle_i \langle \hat{J}_{y_2} \rangle_i + \sum_i 2p_i \langle \hat{J}_{z_1} \rangle_i \langle \hat{J}_{z_2} \rangle_i - \langle \hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2} \rangle_\rho^2 - \langle \hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2} \rangle_\rho^2 \quad (13)$$

$$= \sum_i p_i (\langle \Delta \hat{J}_{y_1}^2 \rangle_i + \langle \Delta \hat{J}_{y_2}^2 \rangle_i + \langle \Delta \hat{J}_{z_1}^2 \rangle_i + \langle \Delta \hat{J}_{z_2}^2 \rangle_i) + \sum_i p_i \langle \hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2} \rangle_i^2 - \left( \sum_i p_i \langle \hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2} \rangle_i \right)^2 + \sum_i p_i \langle \hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2} \rangle_i^2 - \left( \sum_i p_i \langle \hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2} \rangle_i \right)^2. \quad (14)$$

---

<sup>6</sup> En alternativ måde at lave testen er som i [2] og nævnt i [4] at tildele ensemblerne en slags impuls- og positionsoperator  $\hat{X}, \hat{P}$  givet ved  $\hat{X} = \frac{\hat{J}_y}{\sqrt{J_x}}, \hat{P} = \frac{\hat{J}_x}{\sqrt{J_x}}$ , idet vi som nævnt kan betragte  $\tilde{J}_x$  som værende tallet  $J_x$ . Ved at gå frem som vi gør forinden og betragte den totale minimale varians på operatorerne  $\hat{X}_1 + \hat{X}_2$  og  $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$  kommer man frem til et kriterium som vores, hvor man blot har divideret med  $J_x$ .

Her er  $\langle \cdot \rangle_i$  forventningsværdien af den pågældende operator taget over tilstanden  $\rho_1^i \otimes \rho_2^i$  og jeg har brugt at taget over de enkelte produkttilstande  $\langle \cdot \rangle_i$  vil f.eks.  $\hat{J}_{y_1} \hat{J}_{y_2}$  faktoriseres, så  $\langle \hat{J}_{y_1} \hat{J}_{y_2} \rangle_i = \langle \hat{J}_{y_1} \rangle_i \langle \hat{J}_{y_2} \rangle_i$  - vi har jo antaget at de to ensembler ikke er entangled. I disse udregninger har jeg først brugt definitionen af variansen, skrevet udtrykket ud og i sidste ligning trukket  $\sum_i p_i (\langle \hat{J}_{y_1} \rangle_i^2 + \langle \hat{J}_{y_2} \rangle_i^2) + \sum_i p_i (\langle \hat{J}_{z_1} \rangle_i^2 + \langle \hat{J}_{z_2} \rangle_i^2)$  fra i første linje og lagt det til i de to sidste linjer og endelig samlet leddene for at komme frem til udtrykket i (14). Det følger af kommutatorrelationen  $[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hat{J}_x$ , samt Heisenbergs usikkerhedsprincip, at der for de ortogonale komponenter af spinnene gælder at:  $(\Delta \hat{J}_y)(\Delta \hat{J}_z) \geq \frac{|\langle \hat{J}_x \rangle|}{2}$ . Dermed er:  $(\Delta \hat{J}_y - \Delta \hat{J}_z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\Delta \hat{J}_y)^2 + (\Delta \hat{J}_z)^2 \geq 2\Delta \hat{J}_y \Delta \hat{J}_z \geq |\langle \hat{J}_x \rangle|$ . Cauchy-Schwarz' ulighed giver at leddet i de to sidste linjer af (14) er begrænset nedadtil af  $0^7$ . Så alt i alt får vi:

$$\Delta \geq \sum_i p_i (\langle \Delta \hat{J}_{y_1}^2 \rangle_i + \langle \Delta \hat{J}_{y_2}^2 \rangle_i + \langle \Delta \hat{J}_{z_1}^2 \rangle_i + \langle \Delta \hat{J}_{z_2}^2 \rangle_i) \quad (15)$$

$$\geq \sum_i p_i (|\langle \hat{J}_{x_1} \rangle_i| + |\langle \hat{J}_{x_2} \rangle_i|) = |\langle \hat{J}_x \rangle|. \quad (16)$$

Hvor jeg til sidst har sat  $\hat{J}_{x_1} + \hat{J}_{x_2} = \hat{J}_x$ , der er  $\approx 2\tilde{J}_x$ , da vi med meget god tilnærmelse har  $\hat{J}_{x_1} = \hat{J}_{x_2}$ . D.v.s. at for enhver separabel tilstand af de to ensembler må uligheden (16) gælde. Er denne brudt må vores antagelse om separabilitet være forkert og de to ensembler må være entangled, jvf. diskussionen af blandede tilstande. Hvis der havde været et lighedstegn, havde vi haft at begge ensembler var i kohærente spintilstande, hvor hver af de ortogonale spinkomponenter ville have  $\text{Var}(\hat{J}_y) = \text{Var}(\hat{J}_z) = \frac{J_x}{4} = \frac{\tilde{J}_x}{2}$  for begge ensembler og atomerne ville være ukorrelerede. Dette er præcis begyndelsesbetingelserne i eksperimentet og hvis man tænker på de kohærente spintilstande, som dem med mindst støj, så er de så at sige grænsen mellem de separable og entangled tilstande<sup>8</sup>. Det bemærkes også at vi i udledningen af uligheden (16) ikke har brugt atomernes spin  $J$ , så dette kriterium for at de to ensembler er entangled er det samme for atomer med vilkårligt spin, altså ikke kun  $J = 4$ . Hermed har vi udledt den først test, som kan bruges i eksperimenter som foroven, hvor man har adgang til størrelserne i (16).

<sup>7</sup> Kan indses ved at sætte  $x_i = \sqrt{p_i}$ ,  $y_i = \sqrt{p_i} \langle J_{y_1} - J_{y_2} \rangle_i$  og så bruge Cauchy-Schwarz' ulighed på formen  $(\sum_i x_i y_i)^2 \leq (\sum_i x_i^2)(\sum_i y_i^2)$  og tilsvarende for z-komponenten.

<sup>8</sup> Jeg har undladt at tale om de *squeezede* tilstande, der ligesom de kohærente - har  $\Delta \hat{J}_y \Delta \hat{J}_z = \frac{|\langle \hat{J}_x \rangle|}{2}$ , men hvor usikkerhederne er ulige fordelt. Set i det lys, så svarer de entangled tilstande brydende (16) til en squeezing af de to observable.

Hvis vi nu for et sæt målinger får at ensembleerne er entangled kunne det være interessant at se om vi har 3 atomer, der indgår i den entanglede tilstand, for ovenstående test giver jo at der er mindst to. Så nu antager vi at man kan beskrive det samlede system som produktet af tilstandene for entanglede atompar fra de to ensembler:  $\rho = \sum_i \sum_\sigma p_i w_\sigma \rho_{1,\sigma(1)}^i \otimes \rho_{2,\sigma(2)}^i \otimes \cdots \otimes \rho_{N,\sigma(N)}^i$  (alle tæthedsmatricerne behøver ikke nødvendigvis ikke at repræsentere entanglede atompar, men vi ved at mindst én af dem gør det, ellers er det blot tilstanden for systemet bestående af to ukorreleerede atomer). Vi har også antaget at der er lige mange atomer i de to ensembler, hvilket sådan set ikke er en nødvendig antagelse, idet man sagtens kunne have tilføjet disse "restatomer" i tæthedsmatricen, men da de er ukorreleerede, så er den mindste støj de kan give, den der hører til den kohærente tilstand. På den måde vil deres bidrag til det kollektive middelspin  $\hat{J}_x$  blive opvejet af deres bidrag til variansen, for i de kohærente tilstande har vi jo netop at  $\text{Var}(\hat{J}_y) + \text{Var}(\hat{J}_z) = |\langle \hat{J}_x \rangle|$ . Effektivt betyder det blot en forskydning af nulpunktet, hvilket jeg for nemheds skyld ignorerer. De  $\sigma$ 'er der optræder foroven er permutationerne, altså ombytningen af partiklerne  $\sigma : \{1, 2, \dots, N\}$  vægtet de tilhørende  $w_\sigma$  ( $\sum_\sigma w_\sigma = 1$ ), så vi på denne måde får dækket de forskellige måder, hvorpå atomerne kan være entangled i par.  $\rho_{k,\sigma(k)}^i$  er således tæthedsmatricen for det entanglede par bestående af atom  $k$  i ensemble 1 og atom  $\sigma(k)$  i ensemble 2 i den  $i$ 'te tilstand. I det kommende vil jeg betegne atomparrene med  $\alpha$ ,  $\beta$  og  $\gamma$ , der har indeks hhv.  $m, n$  og  $k$ , så f.eks.  $\gamma(k) = (k, \sigma(k))$ . Hvis vi nu ser på de kollektive variable, så har vi for z-komponenten at:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{J}_z) &= \langle (\hat{J}_z)^2 \rangle_\rho - \langle \hat{J}_z \rangle_\rho^2 \\
&= \sum_i \sum_\sigma p_i w_\sigma \left( \sum_{m \neq n} \langle \hat{J}_{z\alpha(m)} \rangle_i \langle \hat{J}_{z\beta(n)} \rangle_i + \sum_k \langle \hat{J}_{z\gamma(k)}^2 \rangle_i \right) - \left( \sum_i \sum_\sigma p_i w_\sigma \sum_k \langle \hat{J}_{z\gamma(k)} \rangle_i \right)^2 \\
&= \sum_i \sum_\sigma p_i w_\sigma \sum_{m,n} \langle \hat{J}_{z\alpha(m)} \rangle_i \langle \hat{J}_{z\beta(n)} \rangle_i - \left( \sum_i \sum_\sigma p_i w_\sigma \sum_k \langle \hat{J}_{z\gamma(k)} \rangle_i \right)^2 + \\
&\quad \sum_i \sum_\sigma p_i w_\sigma \sum_k \left( \langle \hat{J}_{z\gamma(k)}^2 \rangle_i - \langle \hat{J}_{z\gamma(k)} \rangle_i^2 \right) \\
&\geq \sum_i \sum_\sigma p_i w_\sigma \sum_k (\Delta \hat{J}_{z\gamma(k)})_i^2. \tag{17}
\end{aligned}$$

I denne omskrivning har jeg opløst den kollektive spin  $\hat{J}_z$  som summen af de atomare  $\hat{J}_{z\gamma(k)}$ , der skal opfattes som operatoren, der er summen af operatorerne  $\hat{J}_{z_1}$  og  $\hat{J}_{z_2}$  virkende på hhv. atom  $k$  i ensemble 1 og  $\sigma(k)$  i ensemble 2. For at komme frem til uligheden har jeg først fundet forventningsværdierne ud fra tæthedsmatricen og for  $(\hat{J}_z)^2$  delt op i

to tilfælde; det ene hvor operatoren  $\hat{J}_z$  har virket på forskellige atompar (summen med  $m \neq n$ ) og det andet hvor det er det samme atompar operatoren virker på begge gange (sum over  $k$ ). Dernæst har jeg lagt  $\sum_i \sum_\sigma p_i w_\sigma \sum_k \langle \hat{J}_{z\gamma(k)} \rangle_i^2$  til og trukket fra i anden linje og endelig brugt Cauchy-Schwarz' ulighed på parallel vis til det beskrevne i fodnote 4, til at slutte at  $\sum_i \sum_\sigma p_i w_\sigma \sum_{m,n} \langle \hat{J}_{z\alpha(m)} \rangle_i \langle \hat{J}_{z\beta(n)} \rangle_i - (\sum_i \sum_\sigma p_i w_\sigma \sum_k \langle \hat{J}_{z\gamma(k)} \rangle_i)^2 \geq 0$ . På samme måde fås for y-komponenten at:

$$\text{Var}(\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2}) \geq \sum_i \sum_\sigma p_i w_\sigma \sum_k (\Delta(\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2})|_{\gamma(k)})_i^2. \quad (18)$$

Når vi lægger varianserne i (17) og (18) sammen får vi at:

$$\Delta = \text{Var}(\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2}) + \text{Var}(\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2}) \quad (19)$$

$$\geq \sum_i \sum_\sigma p_i w_\sigma \sum_k ((\Delta(\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2})|_{\gamma(k)})_i^2 + ((\Delta(\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2})|_{\gamma(k)})_i^2) \quad (20)$$

$$\geq \sum_i \sum_\sigma p_i w_\sigma \sum_k 2JG_J(\langle \hat{J}_{x\gamma(k)} \rangle / 2J) \quad (21)$$

Her er  $G_J$  de kurver jeg har fra mit program, der giver minimum for  $(\Delta(\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2}))^2 + (\Delta(\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2}))^2$  som funktion af (det normaliserede - derfor faktor  $2J$ ) middelspin  $\langle \hat{J}_x \rangle$  divideret med  $2J^9$ . Inden jeg beskriver hvordan jeg har fundet kurverne vil jeg bemærke at disse  $G_J$  er konvekse<sup>10</sup>, så de opfylder Jensens ulighed, d.v.s. enhver linearkombination af  $G_J$  med positive koefficienter er større end eller lig med funktionen taget i linearkombinationen af argumenterne. Det kan vi så bruge ved:

$$\text{Var}(\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2}) + \text{Var}(\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2}) \geq \sum_i \sum_\sigma p_i w_\sigma 2N JG_J(\sum_k \langle \hat{J}_{x\gamma(k)} \rangle_i / 2NJ) \quad (22)$$

$$\geq 2N JG_J(\sum_i \sum_\sigma p_i w_\sigma \sum_k \langle \hat{J}_{x\gamma(k)} \rangle_i / 2NJ) \quad (23)$$

$$= 2N JG_J(\frac{\langle \hat{J}_x \rangle}{2NJ}). \quad (24)$$

Her er  $\hat{J}_x$  det totale kollektive spin for ensembleerne og vi har hermed udledt et kriterium i form af en ulighed, som må være opfyldt, hvis det er muligt at betragte systemet som entangled partikelpar. Er denne brudt er vores antagelse forkert og vi ved at vi derfor

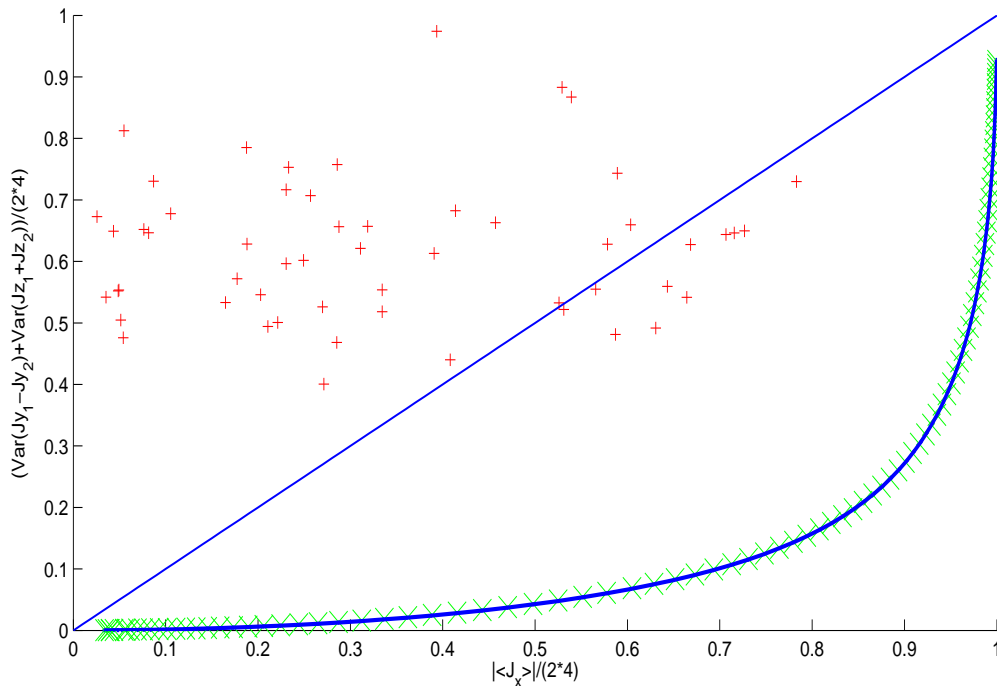
---

<sup>9</sup> For cæsium-atomerne er  $J = 4$ , men jeg har valgt at beholde  $J$ , da denne test kan bruges til alle heltallige spin. For halvtallige spin er situationen mere kompliceret, da der er et symmetribrud for lave værdier af middelspinnet, så minimumstilstanden ikke længere er entydig som diskuteret i [3].

<sup>10</sup> At dette er tilfældet kan vises på en tilsvarende måde som det er gjort for kurverne  $F_J$  i [3].

mindst har 3-atom-entanglement. Vi så tidligere på et eksperiment, hvor man har adgang til varianserne på  $\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2}$  og  $\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2}$  for forskellige værdier af  $\langle \hat{J}_x \rangle$ . Disse målinger svarer så til punkter i koordinatsystemet hørende til grafen for kurven  $G_J$  og i tilfælde af at punktet ligger under kurven kan man slutte at der er 3-atom-entanglement.

Foroven brugte jeg de minimumsvarianser vi har fundet i MatLab, som jeg nu vil give en lille beskrivelse af hvordan vi bestemte.<sup>11</sup> Vores analyse bygger på antagelsen om at de tilstande der minimerer  $\text{Var}(\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2}) + \text{Var}(\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2})$  for en given værdi af  $\langle \hat{J}_{x_1} + \hat{J}_{x_2} \rangle$  har  $\langle \hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2} \rangle = \langle \hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2} \rangle = 0$ , så disse tilstande giver også minima for  $\langle (\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2})^2 \rangle + \langle (\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2})^2 \rangle$ . Vi har bestemt disse tilstande ved at minimere udtrykket  $\mu(\hat{J}_{x_1} + \hat{J}_{x_2}) + (\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2})^2 + (\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2})^2$ , hvor  $\mu$  er en Lagrange-multiplikator, der styrer værdien af x-komponenten af spinnets. Dette er et lineært problem, der består i at diagonalisere matricer (den sædvanlige matrixrepræsentation for spin-operatorerne) og finde de egentilstande, der minimerer værdien af udtrykket foroven. Det er gjort i Matlab ved at bestemme numerisk den mindste egen værdi for sidstnævnte operator for en lang række  $\mu$ 'er og evaluere  $(\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2})^2 + (\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2})^2$  i de tilhørende egentilstande. Ud fra det kan vi så lave et plot, hvor vi har den minimale varians som funktion af det kollektive middelspin  $\hat{J}_x$ , (den sammenhængende kurve):



<sup>11</sup> Programmet er vedlagt i appendiks A.2.

Nu kunne det være interessant at tjekke, hvorvidt vores antagelse om forsvindende middelværdier var korrekt. Så i MatLab har jeg sat programmet til at lede efter lokale minima for  $\text{Var}(\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2}) + \text{Var}(\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2})$  for forskellige værdier af middelspinnet (igen styret af en Lagrange-multiplikator) ved hjælp af "fminsearch". Til dette skulle man give fminsearch en 'begyndelsestilstand', som den kunne lede i en omegn af og der har jeg prøvet at give de minimumstilstande, der hørte til vores kurve. Som det fremgår af grafen - krydserne, der ligger op ad kurven, så fandt fminsearch ikke nogen minima, der lå under punkterne på kurven, men fandt præcis de samme minima. Så har jeg også prøvet at give tilfældige enhedsvektorer som input og resultatet ses som plusser i koordinatsystemet (jeg har dog af hensyn til overskueligheden kun betragtet varianser op til 1). Det fremgår at de minimumsvarianser som fminsearch da fandt ligger langt over dem vi har på vores kurve, ja faktisk ligger de fleste endda over den linje, der hører til kriteriet for 2-atom-entanglement i (16):  $\text{Var}(\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2}) + \text{Var}(\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2}) < |\langle \hat{J}_x \rangle|$ . Det har altså ikke været muligt at finde tilstande, der kunne minimere varianserne yderligere og vores antagelse om forsvindende middelværdier synes retfærdiggjort. Altså svarer punkterne på kurven virkelig til den minimale varians for tilstande med atomerne entangled i binære systemer.

Det kunne tænkes at man ville gå videre og prøve at lave en test for 4-atom-entanglement på samme måde. Altså man kunne antage at atomerne i de to ensembler var entangled i grupper på 3 - 2 fra det første ensemble og 1 fra det andet eller omvendt og se hvad minimumsvariansen så bliver. Det har jeg så gjort og der fik jeg at det var ligegyldigt hvad vores ansats om fordelingen af de entanglede tripler var, altså om vi hele tiden tog par fra ensemble 1 og entanglede med et atom fra ensemble 2 eller vice versa eller om fordelingen var helt vilkårlig, for tæthedsmatricen for det samlede system kunne deles op i de to situationer, der begge havde de samme minimumstilstande. Ikke desto mindre, så lå den fundne kurve i MatLab for 4-atom-entanglement over den for 3. Det er selvfølgelig ikke muligt at kravet til varianserne bliver mindre end før og viser at man ikke bare uden videre kan udvide testen til flere atomer. Af mulige grunde er der for det første det, at det ikke er klart, at det er den "mest økonomiske" løsning for den samlede varians at entangle atomerne i tripler. Ligeledes er det heller ikke sikkert at middelværdierne for  $\hat{J}_{y_1} - \hat{J}_{y_2}$  og  $\hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2}$  stadigvæk er forsvindende i de tilstande, der minimerer variansen. Det kunne man igen prøve at tjekke ved at bruge fminsearch, men det har vist sig at tage meget lang tid at gøre det bare for et enkelt punkt, så det udskydes til engang, når kvantecomputeren er blevet udviklet.

## 5. Konklusion

Vi har i denne opgave fået defineret hvad de entanglede tilstande er og beskrevet nogle af deres egenskaber. Til dette har vi brugt tæthedsoperatoren, som har vist sig at være et uundværligt værktøj og som vi også har set nogle af egenskaberne for. Derefter har vi beskrevet et eksperiment, hvor entanglement blev realiseret for to ensembler, bestående af cæsium-atomer. Som udgangspunkt i dette eksperiment har vi formuleret to tests, der kan bruges til at påvise 1) at to ensembler er entangled og 2) at atomerne må være entangled i systemer, der er større end de binære, altså mindst 3-atom-entanglement. Vi har desuden kort nævnt at en direkte udvidelse af testen til flere atomer ikke var mulig. Komplikationerne ved udviklingen af testen til flere atomer kan nok i sidste ende føres tilbage til det symmetribrud, der opstår, når vi kommer ud over 2-atom-entanglement, hvor de to ensembler kan begynde at se forskellige ud pga. den uens fordeling af entanglede atomer. Asymmetrien i problemstillingen bliver endnu større, hvis vi f.eks. ville se på en udvidelse af testen til 5 atomer eller flere, da man får mange flere måder at entangle atomerne på, hvor nogle kan være "bedre" end andre. F.eks. hvis vi havde haft held med at konstruere en test for 4-atom-entanglement og skulle teste den for 5, så kunne de 4 entanglede atomer sidde sammen som 1+3 og 2+2 og disse muligheder har højst sandsynligt forskellige minima, der gør det svært at sige hvad den egentlige minimumstilstand og varians er. Ikke desto mindre kunne det være interessant at prøve at bestemme disse minimumstilstande numerisk, for det kunne jo være at der var en egenskab, der gik igen. F.eks. at den minimale varians var at finde når atomerne blev entangled i grupper på et lige antal atomer, så når vi prøvede at lede efter et kriterium for 5-partikel-entanglement kunne vi antage at alle atomerne var entangled som 2+2. Selv om det er en lidt søgt måde at reparere symmetribruddet på, så kunne det være at man på denne måde kunne finde nogle skjulte symmetrier, som 'minimumskonfigurationen' besidder.

Selv om vores test ikke direkte kan udvides til en test af  $k$ -atom-entanglement, så har den dog den styrke at den har en simpel generalisering til andre heltallige spin - man kan nemt finde den tilhørende kurve i MatLab ved at vælge det passende  $J$ . I et nyligt eksperiment med teleportering blev de entanglede tilstande også skabt som i [4], men de data de fik, lå over vores kurve for 3-partikel-entanglement, så vores test viste altså ikke noget der. Men hvis det nu var muligt at lave et tilsvarende eksperiment, hvor man istedet havde spin  $J = 1$  partikler, så kunne det være, at det vi ville være nemmere at

påvise 3-partikel-entanglement, da de tilhørende minimumsvarianser ligger noget over dem for  $J = 4$ , men har ellers samme form.



## Litteratur

- [1] R.F. Werner, Phys. Rev. A 40, 4277 (1989)
- [2] Lu.M. Duan, G. Giedke, J.I. Cirac and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. 84, 2772-2725 (2000)
- [3] A. Sørensen and K. Mølmer, Phys. Rev. Lett. 86, 4431 (2001)
- [4] B. Julsgaard, A. Kozhenkin and E.S. Polzik, Nature 413, 400-403 (2001)
- [5] J. Bouda and V. Buzek, Phys. Rev. A 65, 034304 (2002)
- [6] [http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum\\_entanglement](http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_entanglement)
- [7] <http://www.iqis.org/media/pdf/events/sschool03/Lecture11to12-Foundations-Watrous.pdf>
- [8] [http://cua.mit.edu/8.422\\_old/NOTES-schmidt-decomposition-and-epr-from-nielsen-and-chuang-p109.pdf](http://cua.mit.edu/8.422_old/NOTES-schmidt-decomposition-and-epr-from-nielsen-and-chuang-p109.pdf)
- [9] <http://www.ima.aff.csic.es/pcc/LucasLamata/DEA.pdf>
- [10] <http://www.cithec.caltech.edu/~fcp/physics/quantumMechanics/densityMatrix/densityMatrix.pdf>
- [11] <http://www.cs.ru.nl/~heunen/quantumreadinggroup/bub.pdf>
- [12] Kap.2 og 4 i noter af Preskill (udleveret af vejlederen)
- [13] *Deterministic atom-light quantum interface* af Jacob Sherson, Brian Julsgaard og E.S. Polzik.

# A. Appendiks

## A.1. Schmidt dekomposition

Det følgende bevis for eksistensen af Schmidt dekompositionen bygger på [9].

Lad  $\{|u_m\rangle\}$  og  $\{|v_n\rangle\}$  være endelige ortonormalbaser for Hilbertrumene hørende til systemerne  $A$  og  $B$ . Så kan en vilkårlig ren tilstand for det samlede system skrives som:

$$|\psi\rangle = \sum_m \sum_n a_{mn} |u_m\rangle |v_n\rangle. \quad (25)$$

Nu danner vi så tæthedsmatricen:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{m,n} \sum_{\tilde{m},\tilde{n}} a_{mn} a_{\tilde{m}\tilde{n}}^* |u_m\rangle\langle u_{\tilde{m}}| \otimes |v_n\rangle\langle v_{\tilde{n}}| \quad (26)$$

Så vil vi trace det største system ud, som vi antager er system  $B$ <sup>12</sup>:

$$\text{Tr}_B(\rho) = \sum_{\dot{n}} \langle v_{\dot{n}} | \rho | v_{\dot{n}} \rangle = \sum_{m,\tilde{m}} \left( \sum_{\dot{n}} a_{m\dot{n}} a_{\tilde{m}\dot{n}}^* |u_m\rangle\langle u_{\tilde{m}}| \right) \quad (27)$$

Her har jeg brugt at eftersom basisvektorerne er indbyrdes ortogonale, er  $\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}$ , så det er kun de led, hvor  $n = \tilde{n} = \dot{n}$ , der bidrager til summen. Matricen i parentes, som vi kan kalde  $X$  er hermitisk og har elementer  $X_{m\tilde{m}} = \sum_{\dot{n}} a_{m\dot{n}} a_{\tilde{m}\dot{n}}^*$ . Spektralsætningen fortæller os at vi kan diagonalisere  $X$  og får egenvektorerne, som vi kan arrangere i den transponerede matrix  $Y^T$  med tilhørende egenverdier  $\lambda$ :

$$\sum_{\tilde{m}} X_{m\tilde{m}} Y_{\tilde{m}\dot{m}}^T = \lambda_{\dot{m}} Y_{m\dot{m}}^T. \quad (28)$$

Heraf får vi egenvektorerne  $|\psi_m^A\rangle$  for  $X$ :

$$|\psi_m^A\rangle = \sum_{\tilde{m}} Y_{m\tilde{m}} |u_{\tilde{m}}\rangle \quad (29)$$

Nu kan vi lave et basisskift ved at udtrykke  $|u_m\rangle$  ved den fundne  $|\psi_m^A\rangle$ , så tæthedsmatricen kan skrives som:

$$\rho = \sum_{m\tilde{m}} \sum_{n\dot{n}} a_{mn} a_{\tilde{m}\dot{n}}^* \sum_{\dot{m}} Y_{\dot{m}m}^* |\psi_{\dot{m}}^A\rangle \sum_{m'} Y_{m'\tilde{m}} \langle\psi_{m'}^A| \otimes |v_n\rangle\langle v_{\dot{n}}| \quad (30)$$

---

<sup>12</sup> I afsnittet om entanglement skrev vi at summen i Schmidt-dekompositionen løb op til minimum af dimensionerne af Hilbertrumene  $H_A$  og  $H_B$ , her har vi antaget at  $H_B$  har den største dimension.

Nu lader vi så  $|\psi_m^B\rangle$  være tilstandene givet ved:

$$|\psi_m^B\rangle = \sum_{\tilde{m}} \sum_n Y_{m\tilde{m}}^* a_{\tilde{m}n} |v_n\rangle. \quad (31)$$

Og så får tæthedsmatricen endelig formen:

$$\rho = \sum_m \sum_{\tilde{m}} |\psi_m^A\rangle \langle \psi_{\tilde{m}}^A| \otimes |\psi_m^B\rangle \langle \psi_{\tilde{m}}^B| \quad (32)$$

Denne tæthedsmatrix hører til den rene tilstand

$$|\psi\rangle = \sum_m |\psi_m^A\rangle \otimes |\psi_m^B\rangle \quad (33)$$

Nu har vi ikke normaliseret  $|\psi_m^B\rangle$ , gør man det får man normaliseringskonstanten  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_m}}$  og vi får dermed Schmidt dekompositionen:

$$|\psi\rangle = \sum_m \sqrt{\lambda_m} |\psi_m^A\rangle \otimes |\psi_m^B\rangle \quad (34)$$

## A.2. Programmet

Her vil jeg blot gengive koden for programmerne i MatLab, hvor de blev skrevet i editoren. Vi har byttet om på x og z i forhold til resten af opgaven. Først følger den for de programmer som vores test benytter sig af - Delta-funktionen:

```
function h = DELTAfunc(i,j)
if i == j
h = 1;
else
h = 0;
end
```

Hæve-operatoren:(Vi behøver ikke at lave sænkeoperatoren særskilt, da den jo blot er den hermitisk konjugerede til hæveoperatoren.)

```
function f = JPLUS2func(J)
for i = 1:2*J+1;
for j = 1:2*J+1;
```

```

B(i,j) = sqrt((j-1)*(2*(J+1)-j))*DELTA(i,j-1);
end
end
f = B;

```

Og endelig  $\hat{J}_z$ :

```

function g = JZfunc(J)
for i = 1:2*J+1;
A(i,i) = J+1-i;
end
g = A;

```

Så kommer selve programmet, der laver vores kurver, her angiver X minimumsvariansen hørende til vores kurve, XX er det minimum som programmet finder ved fminsearch, når vi lader den starte med en tilfældig enhedsvektor og XXX er det minimum fminsearch finder, når vi lader den starte med tilstanden hørende til X - kaldet fi:

```

Npoints = 100;
mustart = 0.01;
muend=100;
J = 4;
Jp = JPLUS2(J);
Jz = JZ(J);
Jztot = kron(Jz,eye(2*J+1)) + kron(eye(2*J+1),Jz);
Jx = 0.5*(Jp+(Jp)');
Jxtot = kron(Jx,eye(2*J+1)) + kron(eye(2*J+1),Jx);
Jxtot2 = (Jxtot)*(Jxtot);
Jy = -0.5*i*(Jp-(Jp)');
Y_ = kron(Jy,eye(2*J+1)) - kron(eye(2*J+1),Jy);
Y_2 = (Y_)*(Y_);
mu = logspace(log10(mustart),log10(muend),Npoints);
for i = 1:Npoints;
H = mu(i)*Jztot+Jxtot2+Y_2;

```

```

[psi,lambda] = eig(H);
fi=psi(:,1);
a=fminsearch('MINTESTfunc',[fi;fi],[],mu(i),Jztot,Jxtot,Jxtot2,Y_2,Y_);
chi=(a(1:(length(a)/2))+sqrt(-1)*a((length(a)/2+1):length(a)));
chi=chi/(sqrt(chi'*chi));
Jztotmini(i) = chi'*Jztot*chi;
XXX(i) = (chi'*(Y_2+Jxtot2)*chi)-(chi'*Y_2*chi)(chi'*Y_2*chi)-
(chi'*Jxtot*chi)*(chi'*Jxtot*chi);
b=rand(81,1);
a=fminsearch('MINTESTfunc',[b/(sqrt(b'*b));b/(sqrt(b'*b))],[],mu(i),
Jztot,Jxtot,Jxtot2,Y_2,Y_);
chi=(a(1:(length(a)/2))+sqrt(-1)*a((length(a)/2+1):length(a)));
chi=chi/(sqrt(chi'*chi));
Jztotmin(i) = chi'*Jztot*chi;
XX(i) = (chi'*(Y_2+Jxtot2)*chi)-(chi'*Y_2*chi)*(chi'*Y_2*chi)-
(chi'*Jxtot*chi)*(chi'*Jxtot*chi);
Jztotmean(i) = fi'*Jztot*fi;
X(i) = fi'*(Jxtot2+Y_2)*fi;
end
plot(abs(Jztotmean)/(2*J),X/(2*J),'.')
plot(abs(Jztotmini)/(2*J),XXX/(2*J),'gx')
plot(abs(Jztotmin)/(2*J),XX/(2*J),'r+')
xlabel('|<J_x>|/(2^4)')
ylabel('(Var(Jy_1-Jy_2)+Var(Jz_1+Jz_2))/(2^4)')

```